Problemes

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya

Després d'unes setmanes de pluges, d'un radiant Sant Jordi ple de roses i llibres i, és clar, de l'arribada del bon temps, de nou un bon grapat de problemes matemàtics a la *SCM/Notícies*. En aquesta ocasió estem amb una modesta celebració: creuem el límit dels 150 problemes proposats, fita gens menyspreable! En aquesta ocasió tindrem dos problemes de geometria sintètica (proposats per Miquel Amengual i Joaquim Nadal), d'aquells que n'hauríem de tenir prou només amb un regle i un compàs. També en tindrem un de desigualtats de polinomis molt entretingut proposat per Xavier Ros-Otón des de Zuric. Finalment, i com és habitual en aquesta secció, José Luis-Diaz Barrero ens proposa una desigualtat amb nombres de Fibonacci. Segur que tots aquests problemes ens faran passar una bona estona. Moltes gràcies a tots per les vostres propostes, totes elles molt interessants!

D'altra banda, veguem les solucions del número anterior. Per manca d'espai només publicarem una mostra de les solucions rebudes, tot i que val a dir que n'hem rebut diverses i amb idees molt diferents. Hem rebut solucions de Joaquim Nadal, d'Esteve Casas i d'Ernest Garriga; a tots ells, moltes gràcies per la feina feta i per les propostes de solucions tan maques i reeixides.

Com sempre, un recordatori: feu arribar tot el material (solucions, propostes de problemes, comentaris, etc.) a l'adreça de correu electrònic següent:

`juan.jose.rue@upc.edu`.

Així mateix, el material preparat en TEXo LaTEX (especialment les figures!) serà més que agraït, ja que permetrà un bon estalvi de temps de cara a l'edició.

Problemes proposats

A149. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Denotem per I l'incentre d'un triangle $\triangle ABC$. Demostreu, fent servir mètodes purament euclidians:

1. Si $AI + BC = BI + CA = CI + AB$, llavors $\triangle ABC$ és equilàter.
2. Si $\frac{AI}{BC} = \frac{BI}{CA} = \frac{CI}{AB}$, llavors $\triangle ABC$ és equilàter.
3. Si $AI \cdot BC = BI \cdot CA = CI \cdot AB$, llavors $\triangle ABC$ és equilàter.

A150. (Proposat per Xavier Ros-Otón, Universitat de Zuric, Zuric.)

Sigui $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Suposem que p té totes les arrels reals, i sigui a el màxim de totes elles. Proveu que per a tot $x \geq a$ es compleix que

$$p'(x) \geq n\,[p(x)]^{\frac{n-1}{n}}\,.$$

A151. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)

Sigui n un enter no negatiu. Demostreu que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\binom{n}{k} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{F_k}{F_{2n}}} \leq \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}},$$

on F_n denota l'n-èssim nombre de Fibonacci, definit per $F_0 = 0, F_1 = 1$, i per $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

A152. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera.)

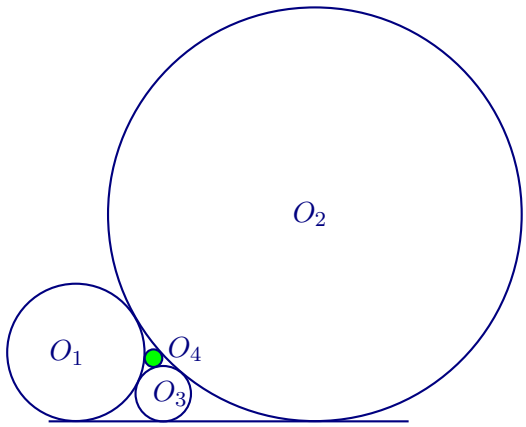
Considerem dues rectes l_1 i l_2 que es tallen en el punt A, i sigui P un punt a l'interior de l'angle $\widehat{A}$. Traceu pel punt P dues rectes r_1 i r_2 que formin entre elles un angle recte, tal que r_1 (resp. r_2) talla l_1 (resp. l_2) en el punt L (resp. M) amb la condició que els triangles $\triangle APL$ i $\triangle APM$ tinguin igual àrea.

A145. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Dedicat a Carles Romero i Chesa. Quatre circumferències $O_1\,(r_1)$, $O_2\,(r_2)$, $O_3\,(r_3)$ y $O_4\,(r_4)$ són mútuament tangents exteriorment i la recta l és una tangent comuna a $O_1\,(r_1)$, $O_2\,(r_2)$ i $O_3\,(r_3)$.

1) Expressau el valor de r_4 com una funció de r_1 i de r_2.

2) Si d és la distància de O_4 a l, provau que $d = 7r_4$.



Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera.)

Resoldrem els dos apartats alhora. Denotem per A, B, C els punts de tangència de les circumferències $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ i $O_3(r_3)$ amb la recta l, respectivament. Sigui D la projecció del centre de la circumferència $O_4(r_4)$ sobre l, i d la longitud del segment O_4D. Definim també $s = r_4+d$ i $u = r_4-d$. En particular, $s+u = 2r_4$ i $s-u = 2d$. El nostre objectiu serà trobar s i u, d'on deduirem immediatament els valors de r_4 i de d.

Comencem calculant la longitud del segment AB. Pel teorema de Pitàgores, és clar que

$$AB^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2,$$

d'on en deduïm que $AB = 2\sqrt{r_1r_2}$. Anàlogament, es demostra que $AC = 2\sqrt{r_1r_3}$ i $BC = 2\sqrt{r_2r_3}$. Com ara, a més, $AB = AC + BC$, tenim que $2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3}$. Podem per tant aïllar r_3 en funció de r_1 i r_2. En particular, per al nostre propòsit, ens interessarà la relació següent (que es dedueix de l'anterior):

$$\frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_3}} = \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} \qquad (1)$$

Ara calcularem la longitud AD. Novament pel teorema de Pitàgores, tenim que $AD^2 + (r_1 - d)^2 = (r_1 + r_4)^2$. Aïllant AD^2 n'obtenim que es compleix que $AD^2 = (r_1+r_4)^2-(r_1-d)^2 = (r_4+d)(2r_1+r_4-d)$, d'on trobem que $AD = \sqrt{s}\sqrt{2r_1+u}$. Anàlogament, podem trobar que $BD = \sqrt{s}\sqrt{2r_2+u}$ i que $CD = \sqrt{s}\sqrt{2r_3+u}$.

Ara relacionem les expressions anteriors amb aquestes. En particular, com que $AB = AD + BD$ i $AC = AD + CD$, tenim que:

$$AB = AD + BD:$$
$$2\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{s}(\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_2+u}), \quad (2)$$
$$AC = AD + CD:$$
$$2\sqrt{r_1r_3} = \sqrt{s}(\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_3+u}).$$

Si ara dividim aquestes dues relacions, obtenim que

$$\frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_3}} = \frac{\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_2+u}}{\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_3+u}}.$$

De la relació (1) ara podem substituir $\sqrt{r_2}/\sqrt{r_3}$, amb la qual cosa tenim la relació:

$$\frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} = \frac{\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_2+u}}{\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_3+u}}.$$

Manipulant aquesta expressió podem aïllar el valor de u, que és igual a:

$$u = \frac{-3r_1r_2}{2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1r_2})},$$

i per tant

$$2r_1 + u = 2r_1 - \frac{3r_1r_2}{2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1r_2})} = \frac{r_1(2\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1r_2})}.$$

Anàlogament deduïm que

$$2r_2 + u = \frac{r_2(2\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2}{2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1r_2})}.$$

Usant ara aquests valors i la relació (2) obtenim finalment que

$$\sqrt{s} = \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{2r_1+u} + \sqrt{2r_2+u}}$$

$$= \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2})}},$$

i per tant $s = \frac{r_1 r_2}{2(r_1+r_2+\sqrt{r_1 r_2})}$. Amb això ja hem acabat, ja que

$$r_4 = \frac{1}{2}(s+u) = \frac{r_1 r_2}{4(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2})},$$

$$d = \frac{1}{2}(s-u) = \frac{7 r_1 r_2}{4(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2})} = 7 r_4,$$

que és el que ens demanaven que demostréssim.

A146. (Proposat per Xavier Ros-Otón, Universitat de Zuric, Zuric.)

Sigui $u(x)$ una funció contínua.

1) Demostreu que si $\frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$ és constant per a tot h, aleshores $u(x) = ax + b$.

2) Demostreu que si $\frac{1}{h^2}(u(x+h) + u(x-h) - 2u(x))$ és constant per a tot h, aleshores $u(x) = ax^2 + bx + c$.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.)

Comencem pel primer apartat. Fent $x = 0$ i prenent h qualsevol, sabem que es compleix que $u(h) - u(0) = a \cdot h$, on a és un valor constant. Per tant, com que h és un número real qualsevol, obtenim que $u(h) = a \cdot h + b$, essent $b = u(0)$.

De cara al segon apartat caldrà treballar una mica més. Per començar, podem suposar que $u(0) = u(1) = 0$: en cas contrari, només caldria considerar la funció $u_1(x) = u(x) - (u(1) - u(0))x - u(0)$ i és clar que si aquesta resulta ser un polinomi de segon grau, $u(x)$ també ho serà.

És també evident que si $p(x)$ és un polinomi, només en el cas que el seu grau sigui inferior o igual a 2 la seva diferència segona tal com està enunciada serà constant. En particular, si suposem que $u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) = 2ah^2$, i $u(0) = u(1) = 0$ el polinomi de segon grau que compleix l'equació en diferències i aquestes dues condicions ha de ser $p(x) = ax^2 - ax$ per a un cert valor a real.

Ara veurem que la nostra funció $u(x)$ i el polinomi $p(x)$ que acabem de descriure coincideixen en els nombres enters. En efecte, si fem $x = 1$ i $h = 1$, obtenim $u(2) + u(0) - 2u(1) = u(2) = 2a$, per a un cert valor a constant. En general, prenent $h = 1$, $x = n$ es té que $u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) = 2a$ i per tant $u(n+1) = 2a + 2u(n) - u(n-1)$. D'aquesta manera anem determinant tots els valors de $u(n)$ (per valors de n enter positiu) d'una forma que només depèn de l'equació en diferències que compleix. Finalment, si fem $x = 0$ tenim $u(h) + u(-h) - 2u(0) = 2ah^2$, i per tant si h és un nombre positiu, es compleix que $u(-h) = 2ah^2 - u(h)$. Així queda fixada la funció per a qualsevol valor negatiu conegut el corresponent valor en positiu. Per tant, per als enters (tant positius com negatius) es compleix que $u(x) = p(x)$.

Ara veurem que la funció $u(x)$ i el polinomi $p(x)$ també coincideixen sobre els nombres racionals. Si fem $x = h = \frac{1}{n}$, obtenim $u\left(\frac{2}{n}\right) + u(0) - 2u\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2a}{n^2}$. Per tant, podem expressar linealment $u(\frac{2}{n})$ en funció de $u(\frac{1}{n})$ més un nombre racional que només depèn de l'equació en diferències.

En general, si fem $x = \frac{k-1}{n}$, $h = \frac{1}{n}$ obtenim $u\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{2a}{n^2} - u\left(\frac{k-2}{n}\right) + 2u\left(\frac{k-1}{n}\right)$ i per inducció veiem que $u\left(\frac{k}{n}\right)$ s'expressa linealment en funció de $u\left(\frac{1}{n}\right)$ més una expressió que només depèn de l'equació en diferències. Per tant $0 = u(1) = u\left(\frac{n}{n}\right)$ s'expressa linealment com $u\left(\frac{1}{n}\right)$ més una fracció algebraica (de h i de a) que només depèn de l'equació en diferències. En definitiva, $u\left(\frac{1}{n}\right)$ només depèn d'una expressió deduïda de l'equació en diferències $u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) = 2ah^2$ i, per tant, el mateix es pot afirmar de $u\left(\frac{m}{n}\right)$ sempre que m sigui més petit (o igual) que n. El mateix argument serveix per demostrar que si $m < n$ són nombres enters positius i k és un altre nombre enter positiu, aleshores $u\left(k + \frac{m}{n}\right)$ ve determinat únicament pel valor de $u(k)$ i de $u(\frac{1}{n})$.

Veguem els nombres racionals negatius: la relació $u\left(\frac{k}{n}\right) + u\left(\frac{-k}{n}\right) = 2a\left(\frac{k}{n}\right)^2$, prèviament establerta ens permet estendre a tots els racionals el fet que el valor de $u\left(\frac{k}{n}\right)$ només depèn de la relació de recurrència que compleixen per igual $u(x)$ i $p(x)$ i amb les mateixes condicions inicials $p(0) = p(1) = u(0) = u(1) = 0$. Per tant, $u(x) = p(x)$ per a tot valor de x racional.

Finalment, a causa de la continuïtat tant de $u(x)$ com de $p(x)$ i el fet que el conjunt dels nombres racionals és dens en el conjunt dels nombres reals, s'obté que $u(x)$

i $p(x)$ coincideixen en tot $\mathbb{R}$: si $x \in \mathbb{R}$ i prenem qualsevol successió $\{x_i\}_{i\geq 1}$ de nombres racionals tals que $x = \lim_{i\to\infty} x_i$, aleshores $u(x) = u(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} u(x_i) = \lim_{i\to\infty} p(x_i) = p(\lim_{i\to\infty} x_i) = p(x)$. Això demostra que $u(x)$ i $p(x)$ coincideixen arreu, tal com volíem veure.

A147. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)

Siguin a, b, c tres nombres reals positius tals que $a + b + c = 1$. Demostreu que la desigualtat

$$\frac{a^3}{x^2+2y^2} + \frac{b^3}{y^2+2z^2} + \frac{c^3}{z^2+2x^2} \geq \frac{1}{9\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

és certa per a tots els nombres reals positius x, y, z.

Solució: (Solució d'Ernest Garriga Valle. Centre Sant Pau, Mataró.)

Estudiarem una desigualtat més general, d'on es deduirà el resultat que volem veure. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ nombres reals positius. Per a $n \geq 2$, indiquem per $T_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n, a_1 + \cdots + a_n = 1\}$ i $f : T_n \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{X_i^2}.$$

Aquesta funció és contínua en el compacte T_n i, per tant, tindrà un mínim absolut que anomenem m_n. La vora de T_n, que indicarem per T_n^v, està formada per la reunió, no disjunta, de còpies $T_{n-1} \subset T_n$ on almenys un dels a_i és igual a 0. Posem $T_n^i = (0,1)^n$ (l'interior de T_n) i estudiarem f sobre la parella T_n^i i T_n^v. Calcularem m_n fent inducció.

Per trobar m_2, usem la notació $X = X_1$, $Y = X_2$. Primer, veiem T_2^i ve donat per la relació $a + b = 1$ amb $(a, b) \in (0,1)^2$, o parametritzat per $g(a) = (a, 1-a)$ amb $a \in (0,1)$. Calculant les derivades, obtenim un únic punt crític. Per exemple, imposant $(f \circ g)'(a) = 0$, obtenim $a = \frac{X}{X+Y}$, d'on $1 - a = \frac{Y}{X+Y}$ i $(f \circ g)\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{(X+Y)^2}$. Ara $T_n^v = \{(1,0), (0,1)\}$ i $f(1,0) = \frac{1}{X^2}$ i $f(0,1) = \frac{1}{Y^2}$. Per tant, $m_2 = \frac{1}{(X_1+X_2)^2}$.

Suposem per inducció que $m_{n-1} = \frac{1}{(X_1+\cdots+X_{n-1})^2}$ i calculem ara m_n. Mitjançant un multiplicador de Lagrange com el següent $F(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{X_i^2} - \lambda(a_1 + \cdots + a_n - 1)$, el sistema següent

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

proporciona la solució $a_k = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}\, X_k$, per a qualsevol k entre 1 i n. A més, de la relació $a_1 + \cdots + a_n = 1$ s'obté $a_i = \frac{X_i}{\sum_{k=1}^{n} X_k}$. Aquest punt $P_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} X_k}(X_1, \ldots, X_n)$ és l'únic punt candidat a donar m_n en T_n^i. Si fem el càlcul obtenim:

$$\begin{aligned} f(P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^3}{(\sum_{k=1}^{n} X_k)^3} \frac{1}{X_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{(\sum_{k=1}^{n} X_k)^3} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}. \end{aligned}$$

Vegem ara la vora de la regió. La restricció de f a la vora T_n^v és de la forma $f(a_1, .., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..a_n)$ per almenys un i amb $a_i = 0$. El mínim de f en T_n és el mínim de f en T_n^i, ja que el mínim de f en cada part de la vora és:

$$\frac{1}{(\sum_{l=1 l\neq i}^{n} X_l)^2} \geq \frac{1}{(\sum_{l=1}^{n} X_l)^2}.$$

Si indiquem $\boldsymbol{j} = (1, \ldots, 1)$, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, tenim aleshores que

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{1}{(\sum_{l=1}^{n} X_l)^2} \\ &= \frac{1}{\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{j} \rangle^2} \geq \frac{1}{\|\boldsymbol{X}\|^2 \|\boldsymbol{j}\|^2} \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2}. \end{aligned}$$

Veiem també que la igualtat és assolible si i només si $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$ (que és quan la desigualtat de Cauchy-Schwartz utilitzada dona igualtat), i llavors ho fa en $a_i = \frac{1}{n}$ per a tot i. Finalment, podem tornar a la desigualtat desitjada com a conseqüència dels nostres resultats: per als valors $n = 3$, $X_1^2 = x^2 + 2y^2$, $X_2^2 = y^2 + 2z^2$, $X_3^2 = z^2 + 2x^2$, obtenim el cas de l'enunciat.

A148. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera.)

Sigui $a_{0,0} = 1$, $a_{n,k} = 0$ si $k < 0$ o $k < n$ i $a_{n,k} = \frac{1}{2}(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k})$. Calculeu $\lim_{n\to\infty} n a_{2n,n}^2$.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.) Recordem en primer lloc la propietat següent dels nombres combinatoris:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Com a conseqüència directa, obtenim que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k} + \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}\right),\end{aligned}$$

és a dir, que $a_{n,k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, ja que satisfà les condicions inicials i la relació de recurrència.

De cara a la segona part, recordem la fórmula de Stirling, que diu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^n}} = 1.$$

En altres paraules, en el càlcul del límit podem substituir $n!$ per $\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$, $(n!)^2$ per $\frac{n^{2n}2\pi n}{e^{2n}}$ i $(2n)!$ per $\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} = \frac{2^{2n}n^{2n}2\sqrt{\pi n}}{e^{2n}}$. Per tant, $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ pot ser substituït per $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$. Finalment, calculem el límit:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} na_{2n,n}^2 &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2^{4n}}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2^{4n}}\frac{2^{4n}}{\pi n} = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Criteri de convergència que s'amaga al jardí» (5 lletres). La resposta és «arrel», en referència al criteri de l'arrel sobre la convergència de sèries de termes positius, i també a l'arrel de les plantes del jardí.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[7]

1. Pot ser angle, i també penetrant, subtil o eixerit (menys de 5 lletres)
2. El polígon més bel·licós (8 lletres)
3. Branca de la matemàtica que provoca problemes al ronyó (6)
4. Regions de l'espai que omplen la benzinera (7 lletres)
5. Ésser que governa sobre els axiomes dels nombres reals (6 lletres)
6. Peculiaritat d'una superfície o d'un cos (14 lletres)
7. Fan una poesia amb els zeros de la funció zeta (5 lletres)
8. Problema NP-difícil que es resol anant de ciutat en ciutat (8 lletres)

[7] Respostes als Matemots: 8. viatjant; 3. càlcul; 6. característica; 2. pentàgon; 4. octants; 7. rimen; 5. suprem; 1. agut.